Corrigés des exercices de 6.1 à 6.15 — حلول التمارين من 1.6 إلى 15.6

Exercice 6.1 :

1/ Pour que la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel, il faut que la relation $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$ soit vérifiée. Les équations suivantes nous permettent d'en déduire les trois constantes inconnues :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\gamma = -1}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \Rightarrow \boxed{\alpha = 4}$$

L'expression de la force $\vec{F}$ est donc :

$$\vec{F} = (x + 2y + 4z)\vec{i} + (2x - 3y - z)\vec{j} + (4x - y + 2z)\vec{k}$$

2/ Nous savons que $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p(x,y,z)$; partant de cela et par une suite de raisonnements, nous arrivons à l'expression du potentiel dont dérive la force ci dessus :

$$-\frac{\partial E_p}{\partial x} = F_x \Rightarrow -E_p = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz + f(y,z)$$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial y} = F_y \Rightarrow 2x + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = 2x - 3y - z \Rightarrow f(x,y) = -\frac{3}{2}y^2 - yz + g(z)$$

$$-E_p = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz - \frac{3}{2}y^2 - yz + g(z)$$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial z} = F_z \Rightarrow 4x - y + \frac{\partial g(z)}{\partial z} = 4x - y + 2z \Rightarrow \frac{\partial g(z)}{\partial z} = 2z$$

$$g(z) = z^2 + C^{te}$$

L'expression du potentiel est donc :

$$E_p = -\frac{1}{2}x^2 - 2xy - 4xz + \frac{3}{2}y^2 + yz - z^2 + C^{te}$$

Pour déterminer la constante C^{te}, on doit revenir aux conditions initiales :

$$E_p(0,0,0) = 2 \Rightarrow C^{te} = 2$$

Finalement l'expression de l'énergie potentielle (ou potentiel) demandée est :

$$\boxed{E_p = -\frac{1}{2}x^2 - 2xy - 4xz + \frac{3}{2}y^2 + yz - z^2 + 2}$$

Exercice 6.2 :

1/ Pour que la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel, il est impérative que l'équation $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$ soit vérifiée, c'est-à-dire que les trois équations suivantes soient vérifiées à leur tour. De ces équations on en déduit la valeur $X(x,z)$. De l'énoncé on en déduit que :

$$F_x = X(x,z) \ , \ F_y = yz \ , \ F_z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow F_x = C^{te} \rightarrow (1)$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial z} = 2x \Rightarrow F_x = 2xy + C^{te} \rightarrow (2)$$

La première solution (1) ne convient pas car $F_x = X(x,z)$ doit être fonction de x et z. Seule la deuxième solution (2) convient. D'après les conditions initiales la constante C^{te} est nulle. D'où : $\boxed{F_x = X(x,z) = 2xz}$

Pour calculer l'énergie potentielle on utilise la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$:

$$-\frac{\partial E_p}{\partial x} = F_x \Rightarrow -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2xz \Rightarrow -E_p = x^2 z + f(y,z)$$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial y} = F_y \Rightarrow 0 + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = yz \Rightarrow f(y,z) = \frac{1}{2}y^2 z + g(z)$$

$$-E_p = x^2 z + \frac{1}{2}y^2 z + g(z)$$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial z} = F_z \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}y^2 = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{\partial g(z)}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial g(z)}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow g(z) = C^{te}$$

Le résultat est $E_p = -x^2 z - \frac{1}{2}y^2 z + C^{te}$. D'après les conditions initiales sur l'énergie potentielle, la constante $g(z) = C^{te}$ est nulle $(z = 0 \Leftrightarrow E_p = 0)$. Le résultat final est :

$$\boxed{E_p = -x^2 z - \frac{1}{2}y^2 z}$$

2/ Calcul du travail par deux méthodes.

Première méthode :

Nous connaissons la formule :

$$dW = -dE_p \ , \ dW = \vec{F}.\vec{dl} \ , \ W = \int_L \vec{F}.\vec{dl} = E_p(B) - E_p(A)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\theta \\ E_p = z\left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) = h\theta R^2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{W = h\theta R^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_p(A) = 0 \\ E_p(B) = h\pi R^2\left(\cos^2\pi + \frac{1}{2}\sin^2\pi\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{W = E_p(B) - E_p(A) = h\pi R^2} \rightarrow (3)$$

Deuxième méthode :

Nous calculons directement le travail en utilisant la formule :

$$W = \int_A^B \left[F_x dx + F_y dy + F_z dz \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} x = R\cos\theta \\ dx = -R\sin\theta . d\theta \\ F_x = 2xz = 2Rh\theta\cos\theta \end{array} \right| \Rightarrow F_x dx = -2R^2 h\theta\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$\left. \begin{array}{l} y = R\sin\theta \\ dy = R\cos\theta . d\theta \\ F_y = yz = 2Rh\theta\sin\theta \end{array} \right| \Rightarrow F_y dy = R^2 h\theta\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$\left. \begin{array}{l} z = h\theta \\ dz = R.d\theta \\ F_z = x^2 + \frac{1}{2}y^2 = R^2 h\left(\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta \right) \end{array} \right| \Rightarrow F_z dz = R^2 h\left(\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta \right) d\theta$$

$$W = \int_0^\pi R^2 h\left(-\theta\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta \right) d\theta$$

$$W = R^2 h\left[\theta\left(\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta \right) \right]_0^\pi \Rightarrow \boxed{W = R^2 h\pi} \to (4)$$

Les deux résultats (3) et (4) sont identiques.

3/ La force étant conservatrice, le travail est le même quelque soit le chemin suivi.

Exercice 6.3 :

Quelque soit le chemin le travail de la force est $W = \int \vec{F} d\vec{r}$

a/ Le travail de la force $\vec{F}$ suivant le chemin rectiligne.

Rappel mathématique : Pour trouver l'équation d'une droite passant par les deux points $P(x_P, y_P, z_P)$ et $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, on doit poser les équations suivantes :

$$\frac{x - x_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - y_P}{y_Q - y_P} = \frac{z - z_P}{z_Q - z_P}$$

Puis en déduire l'équation de la trajectoire :

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y = 2x \\ z = -x \\ z = -\frac{1}{2}y + 1 \end{array} \right.$$

Pour écrire l'expression de la force $\vec{F}$ et du déplacement élémentaire $d\vec{r}$, en fonction de la seule variable x dans le repère cartésien, on remplace y et z :

$$\vec{F} = 5x^2\vec{u}_x - x^2\vec{u}_y + 2x^2\vec{u}_z$$

$$\left. \begin{array}{l} d\vec{r} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z \\ y = 2x \Rightarrow dy = 2dx \\ z = -x \Rightarrow dz = -dx \end{array} \right| \Rightarrow d\vec{r} = dx\vec{u}_x + 2dx\vec{u}_y - dx\vec{u}_z$$

Calculons le travail de la force dans le premier cas :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}\overrightarrow{dr} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \Rightarrow \vec{F}\overrightarrow{dr} = x^2 dx \\ W = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 x^2 dx\end{array}\right| \Rightarrow W = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 \Rightarrow \boxed{W = \frac{7}{3}J}$$

b/ Le travail de la force $\vec{F}$ suivant la courbe brisée $ABCD$.

Dans ce cas, on divise le travail total W_{AD} en trois travaux W_{BC}, W_{AB} et W_{CD} effectués suivant les segments BC, AB et CD.

<u>Suivant le segment rectiligne</u> AB : seule x varie, $y=2$ et $z=-1$. Les expressions respectives de la force et du déplacement élémentaire sont :

$$\vec{F} = \left(x^2+4\right)\vec{u}_x - x\vec{u}_y + 2x\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{dl} = dx\vec{u}_x$$

Calculons le travail pour cette partie du chemin :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}\overrightarrow{dl} = \left(x^2+2\right)dx \\ W_{AB} = \int_1^2 \left(x^2+4\right)dx\end{array}\right| \Rightarrow W_{AB} = \left[\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_1^2 \Rightarrow \boxed{W_{AB} = \frac{19}{3} = 6,33J}$$

<u>Suivant le segment rectiligne</u> BC : on a y variable, $x=2$ et $z=-1$. Les expressions respectives de la force et du déplacement élémentaire sont :

$$\vec{F} = \left(4+y^2\right)\vec{u}_x - 2\vec{u}_y + 2y\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{dl} = dy\vec{u}_y$$

Calculons le travail pour cette partie du chemin :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}\overrightarrow{dl} = -2dy \\ W_{BC} = \int_2^4 -2dy\end{array}\right| \Rightarrow W_{BC} = \left[-2y\right]_2^4 \Rightarrow \boxed{W_{BC} = -4J}$$

<u>Suivant le segment rectiligne</u> CD : on a z variable, $x=2$ et $y=4$. Les expressions respectives de la force et du déplacement élémentaire sont :

$$\vec{F} = \left(4+16\right)\vec{u}_x + 2z\vec{u}_y + 8\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{dl} = dz\vec{u}_z$$

Calculons le travail pour cette partie du chemin :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}\overrightarrow{dl} = 8dz \\ W_{CD} = \int_{-1}^{-2} 8dz\end{array}\right| \Rightarrow W_{CD} = \left[8z\right]_{-1}^{-2} \Rightarrow \boxed{W_{CD} = -8J}$$

Le travail total de A à D est donc :

$$W_{AD} = W_{AB} + W_{BC}W_{CD} \Rightarrow \boxed{W_{AD} = -5,67J}$$

c/ Le travail de la force $\vec{F}$ suivant la courbe définie par les équations paramétriques $x=t$, $y=t^2$, $z=t$

Remplaçons dans l'expression de la force $x=t$, $y=t^2$, $z=t$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}=\left(t^2+t^4\right)\vec{u}_x+t^2\vec{u}_y+t^3\vec{u}_z\\ dx=dt\ \ ,\ dy=2tdt\ \ ,\ dz=dt\\ \vec{F}\overrightarrow{dr}=\left(t^2+t^4\right)dt+2t^3dt+t^3dt\end{array}\right|\Rightarrow dW=\left(t^4+3t^3+t^2\right)dt$$

Le travail de la force dans ce cas est donc :

$$W=\int_0^2\left(t^4+3t^3+t^2\right)dt\Rightarrow\boxed{W=28J}$$

<u>Exercice 6.4</u> :

a/ Puisque la force est centrale et ne dépend que de seulement, son énergie potentielle admet une symétrie sphérique qui ne varie aussi qu'en fonction de . La relation entre la force et l'énergie potentielle est donc $\vec{F}=-\vec{\nabla}E_p$. Et puisque la variable est unique alors la relation est totalement vérifiée dans la composante radiale $\frac{dE_p}{dr}=\frac{k}{r^2}$. De là on peut en déduire la valeur de l'énergie potentielle :

$$E_p=\int\frac{k}{r^2}dr\Rightarrow E_p=-\frac{k}{r}+C^{te}$$

Pour déterminer la constante de l'intégration on considère pour $E_p=0$ on a $r\to\infty$, et par conséquent $C^{te}=0$. D'où :

$$\boxed{E_p=-\frac{k}{r}}\to(1)$$

L'énergie totale E est l'énergie mécanique, c'est-à-dire la somme des deux énergies : potentielle E_p et cinétique E_c .

Puisque le mouvement est circulaire et la trajectoire un cercle on a $v=\dot{\theta}$, $\dot{\theta}$ représente la vitesse angulaire. Donc :

$$\left.\begin{array}{l}E_c=\frac{1}{2}mv^2\\ v=\dot{\theta}r\end{array}\right|\Rightarrow E_c=\frac{1}{2}\underbrace{m\dot{\theta}^2r}_{F=F_c}.r$$

$$E_c=\frac{1}{2}\frac{k}{r^2}.r\Rightarrow\boxed{E_c=\frac{1}{2}\frac{k}{r}}\to(2)$$

En additionnant les équations (1) et (2), membre à membre, on obtient l'énergie totale :

$$E=\frac{1}{2}\frac{k}{r}-\frac{k}{r}\Rightarrow\boxed{E=-\frac{1}{2}\frac{k}{r}}$$

b/ On en déduit l'expression de la vitesse de l'équation (2) :

$$E_c=\frac{1}{2}\frac{k}{r}=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow\boxed{v=\sqrt{\frac{k}{mr}}}$$

c/ Calcul du moment cinétique en coordonnées cylindriques par rapport au centre du cercle :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_O=\vec{r}\wedge m\vec{v}\\ \vec{v}=\underbrace{\vec{v}_r}_{\vec{0}}+\vec{v}_\theta=r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\end{array}\right|\Rightarrow m\begin{vmatrix}\vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z\\ r & 0 & 0\\ 0 & r\dot{\theta} & 0\end{vmatrix}\Rightarrow\boxed{\vec{L}_O=mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z}$$

Le module du moment cinétique est donc égal à :

$$\left.\begin{array}{l} L_O = mr^2\dot{\theta} \\ \dot{\theta} = \dfrac{v}{r} = \dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{k}{mr}} \end{array}\right| \Rightarrow L_O = mr^2\frac{1}{r}\sqrt{\frac{k}{mr}} \Rightarrow \boxed{L_O = \sqrt{mkr}}$$

Exercice 6.5 :

a/ Remarquons que la force est constante. Le travail effectué est donc :

$$dW = \vec{F}\overrightarrow{dr}$$

$$W = \int\left(F_x dx + F_y dy + \underbrace{F_z dz}_{0}\right) \Rightarrow \boxed{W = \int_0^{-3} F_x dx + \int_0^4 F_y dy}$$

$$W = \int_0^{-3} -7dx + \int_0^4 6dy = 21 + 24 \Rightarrow \boxed{W = 45J}$$

b/La puissance moyenne est :

$$\boxed{P_{moy} = \frac{W}{t}} \;,\; P_{moy} = \frac{45}{0,6} \Rightarrow \boxed{P_{moy} = 75W}$$

c/ Pour calculer la variation de l'énergie cinétique, appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum W_i \Rightarrow \boxed{\Delta E_c = 45J}$$

d/ En considérant la vitesse initiale nulle, la vitesse finale est :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \Delta E_c \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2\Delta E_c}{m}}} \;,\; \boxed{v = 9,48ms^{-1}}$$

e/ La variation de l'énergie potentielle n'est autre que le travail fourni avec un signe négatif :

$$\boxed{\Delta E_p = -W} \Rightarrow \boxed{\Delta E_p = -45J}$$

D'après les résultats obtenus on remarque que $\boxed{\Delta E_p = -\Delta Ec}$, on explique cela comme suit :

La particule quitte l'origine sans vitesse initiale, c'est-à-dire qu'elle n'avait initialement aucune énergie cinétique, mais par contre elle possédait une énergie potentielle. En arrivant au point A avec la vitesse calculée précédemment elle a acquit donc une énergie cinétique exactement égale à l'énergie potentielle qui a été totalement dépensée. Au point A l'énergie potentielle est nulle $\left(E_{p,A} = 0\right)$.

Calculons le travail fourni par la force lors de son déplacement de A à B :

$$dW_{AB} = \vec{F}\overrightarrow{dr}$$

$$W_{AB} = \int\left(F_x dx + F_y dy\right) \Rightarrow \boxed{W_{AB} = \int_{-3}^{7} F_x dx + \int_4^{16} F_y dy}$$

$$W_{AB} = \int_{-3}^{7} -7dx + \int_4^{16} 6dy = -28 + 72 \Rightarrow \boxed{W_{AB} = 44J}$$

On peut calculer à présent l'énergie potentielle $E_{p,B}$ au point B :

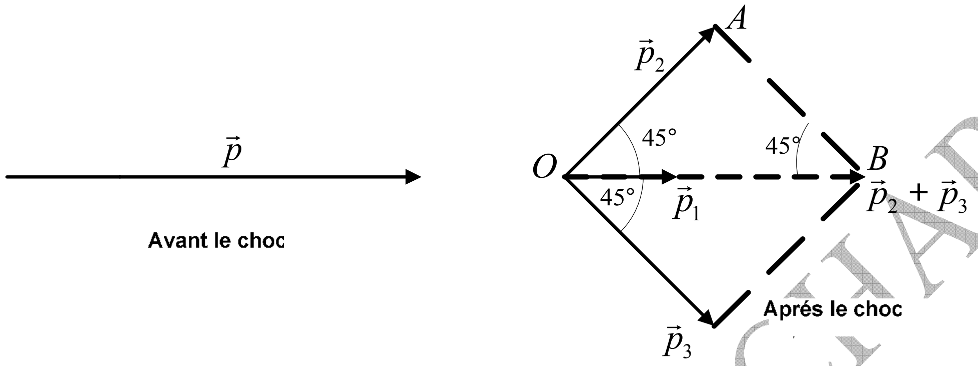
$$E_{P,A} - E_{p,B} = -W_{AB} \Rightarrow E_{p,B} = 44 \;,\; \boxed{E_{p,B} = 44J}$$

Exercice 6.6 :

D'après le principe de la conservation de la quantité de mouvement : la quantité de mouvement avant l'explosion est égale aux quantités de mouvement après l'explosion :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow M\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + m\vec{v}_3$$

Puisque $\vec{p}$ et $\vec{p}_1$ sont horizontales, la résultante de $\vec{p}_2$ et $\vec{p}_3$ est aussi horizontale et le quadrilatère formé est un losange. (Voir figure)



En utilisant la loi des sinus on peut écrire :

$$\frac{p_2}{\sin 45°} = \frac{p_3}{\sin 45°} \Rightarrow \boxed{v_2 = v_3}$$

A partir de la figure ci-dessus on peut calculer l'intensité de la résultante de $\vec{p}_2$ et $\vec{p}_3$:

$$\vec{R} = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow R = \sqrt{p_2^2 + p_3^2} \Rightarrow \boxed{R = mv_2\sqrt{2}}$$

Il ne reste plus qu'à calculer le module des vitesses demandées :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \underbrace{\vec{p}_2 + \vec{p}_3}_{\vec{R}} \Rightarrow p = p_1 + R \Rightarrow Mv = mv_1 + mv_2\sqrt{2}$$

$$M = 3m \Rightarrow v = v_1 + v_2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{3v - v_1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{v_2 = v_3 = 11,3ms^{-1}}$$

Exercice 6.7 :

1/ Pour calculer la vitesse, on applique au système $(M + m)$ isolé les principes de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. Puisque le choc est élastique, la vitesse de la masse m diffère de la vitesse de la masse M .

$$p_1 = p_2 \ \ , \ mv_0 = mv_1 + Mv \Rightarrow mv_1 = mv_0 - Mv \rightarrow (1)$$

$$E_{C1} = E_{C2} \ \ , \ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \Rightarrow mv_1^2 = mv_2^2 - Mv^2 \rightarrow (2)$$

On élève au carré l'équation (1) et on multiplie l'équation (2) par la masse m , puis on procède à une soustraction des équations obtenues et enfin déduire la vitesse v :

$$(1)^2 - (2).m \Rightarrow \boxed{v = \frac{2mv_0}{M + m}} \ , \ \boxed{v = 0,33ms^{-1}}$$

Pour calculer la compression maximale on applique le principe de la transformation mutuelle de l'énergie. La masse M s'arrête après avoir parcouru la distance maximale x_0

et le ressort se comprime de la même valeur. Toute l'énergie cinétique acquise par la collision avec m s'est transformée totalement en énergie potentielle élastique que le ressort emmagasine.

$$E_c = E_p \ , \ \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow \boxed{x_0 = v\sqrt{\frac{M}{k}}} \ , \ \boxed{x_0 = 2,33cm}$$

2/ Puisque le choc est mou la vitesse de la masse m est égale à la vitesse de la masse M . Pour calculer la vitesse on applique le principe de la conservation de la quantité de mouvement au système $(M+m)$:

$$p_1^{'} = p_2^{'} \ , \ mv_0 = (M+m)v^{'} \Rightarrow \boxed{v^{'} = \frac{mv_0}{M+m}} \ \boxed{v' = 0,17ms^{-1}}$$

3/ Le choc est mou. L'énergie cinétique dépensée est égale à l'énergie potentielle emmagasinée :

$$E_c = E_p \ , \ \frac{1}{2}(M+m)v'^2 = \frac{1}{2}kx_0^{'2} \Rightarrow \boxed{x_0^{'} = v^{'}\sqrt{\frac{M+m}{k}} = \frac{mv_0}{\sqrt{k(m+M)}}} \ ,$$

$$\boxed{x_0^{'} = 2,33cm}$$

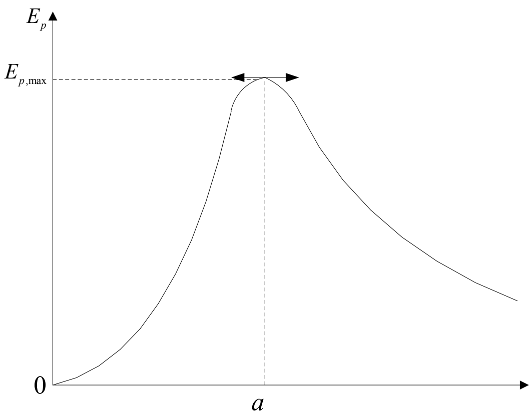
Pour obtenir le travail demandé on applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta E_c = \sum W \\ \Delta E_c = \Delta E_p \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}kx_0^{'2}} \ , \ \boxed{W = 2,17J}$$

<u>Exercice 6.8 :</u>

1/ Le graphe ci-dessous représente les variations de l'énergie potentielle en fonction de la distance .

	0		a		$+\infty$
$\frac{dE_p}{dr} = 2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2}$		+	0	−	
$\frac{d^2E_p}{dr^2}$		+	−	+	
$\left(\frac{d^2E_p}{dr^2}\right)\left(\frac{dE_p}{dr}\right)$		+		−	
$E_p(r)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	



2/ L'énergie potentielle atteint sa valeur maximale quand sa première dérivée par rapport à s'annule :

$$\frac{dE_p}{dt} = 2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2} = 0 \Rightarrow r = a$$

$$r = a \Rightarrow \boxed{E_{p,\max} = Ka^2e^{-1}}$$

3/ Les positions d'équilibre correspondent à l'annulation de la dérivée première $\frac{dE_p}{dt} = 0$, où $r \in \left]-\infty, +\infty\right[$.

$$\frac{dE_p}{dt} = 2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2} = 0 \Rightarrow \boxed{r = \{0, \pm a, \pm\infty\}}$$

4/ Les positions d'équilibre stable correspondent aux positions pour lesquelles $\frac{d^2E_p}{dt^2} \succ 0$, et $\frac{dE_p}{dt} = 0$ de là et d'après l'énoncé on obtient :

$$\frac{d^2E_p}{dt^2} = 2K\left(1-5\frac{r^2}{a^2}+2\frac{r^4}{a^2}\right)e^{-\frac{r^2}{a^2}} \succ 0 \Rightarrow \boxed{r = \{0, \pm\infty\}}$$

5/ L'expression de la force $\vec{F}(M)$ nous la déduisons de la formule $\vec{F}(M) = -\vec{\nabla}E_p$:

$$\vec{F}(M) = -\vec{\nabla}E_p \Rightarrow \vec{F}(M) = -\frac{dE_p}{dt}\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{F}(M) = -2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2}.\vec{u}_r}$$

Exercice 6.9 :

1/ Calcul de la vitesse v_B : $\frac{1}{2}mv_B^2 - \underbrace{\frac{1}{2}mv_A^2}_{0} = mgH \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2gH}}$

2/ Expression de h en fonction de et θ : $h = r - r\cos\theta \Rightarrow \boxed{h = r(1-\cos\theta)}$

3/ Calcul de la vitesse v_C au point C en fonction de h et v_B :

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -mgh \Rightarrow \boxed{v_C = \sqrt{-2gh + v_B^2}}$$

4/ La valeur de la réaction R en fonction de m, r, θ, v_B et g :

La particule est soumise aux deux forces $\vec{P}$ et $\vec{R}$. Le mouvement étant circulaire, la résultante est une force normale. Projetant les forces sur l'axe normal et déduisons la réaction :

$$\left.\begin{aligned} &\vec{R} + \vec{P} = m\vec{a} \\ &R - mg\cos\theta = ma_N \\ &a = a_N = \frac{v_C^2}{r} = \frac{1}{r}\left(-2gh + v_B^2\right) \\ &h = r(1-\cos\theta) \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{R = 3mg\cos\theta - 2mg + \frac{m}{r}v_B^2} \rightarrow (1)$$

5/ Pour que la particule atteigne au moins le point S avec une vitesse nulle il faut qu'elle ait acquis au point B une vitesse minimale qui doit vérifier l'équation :

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_S^2}_{0} - \frac{1}{2}mv_B^2 = -mg(2r) \Rightarrow \boxed{v_{B,\min} = \sqrt{4gr}}$$

6/ Pour calculer la réaction aux points B et S exploitant l'équation (1) et remplaçant h et θ :

Au point B on a : $\theta = 0, h = 0$, d'où :

$$R_B = 3mg\cos 0 - 2mg + \frac{m}{r}v_{B,\min}^2$$

$$R_B = 3mg - 2mg + \frac{m}{r}4gr \Rightarrow \boxed{R_B = 5mg}$$

Au point S on a $\theta = \pi, h =$, d'où :

$$R_S = 3mg\cos\pi - 2mg + \frac{m}{r}v_{B,\min}^2$$

$$R_S = -3mg - 2mg + \frac{m}{r}4gr \Rightarrow \boxed{R_S = -mg}$$

Quand la particule se déplace entre les points cités plus haut le signe de la réaction change du positif au négatif. Cela prouve l'inversion du sens de la réaction au point I (On comprend de cela que la réaction s'annule au point I). Le point où s'annule la réaction est défini par l'angle θ_I que nous voulons déterminer (toujours à partir de l'équation (1))

$$R_I = 3mg\cos\theta_I - 2mg + \frac{m}{r}v_{B,\min}^2$$

$$0 = 3mg\cos\theta_I - 2mg + \frac{m}{r}4gr \Rightarrow \cos\theta_I = -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_I \approx 132°}$$

7/ Pour que la réaction ne s'annule pas entre les points B et S, c'est-à-dire qu'elle doit rester positive tout au long de l'arc BS , il faut satisfaire les conditions suivantes :

$$R \geq 0 \Rightarrow 3mg\cos\pi - 2mg + m\frac{v_{B,0}^2}{r} \geq 0$$

$$\boxed{v_{B,0} \geq \sqrt{5rg}}$$

La valeur de H correspondante est :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}mv_{B,0}^2 = mgH \\ &v_{B,0}^2 \geq 5rg \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{H \geq \frac{5}{2}r}$$

Exercice 6.10 :

Première collision :

Soit $\vec{v}_1$ la vitesse initiale de la bille m_1 avant le choc, pendant que la bille m_2 est à l'état de repos. Après la première collision, la vitesse de la bille m_1 devient $\vec{v}_1^{'}$, au moment où la bille m_2 acquiert la vitesse $\vec{v}_2$. Appliquons les principes de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique pour pouvoir écrire :

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1^{'} + m_2\vec{v}_2 \Rightarrow m_1 v_1^{'} = m_1 v_1 - m_2 v_2 \rightarrow (1)$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \Rightarrow m_1 v_1^{'2} = m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2 \rightarrow (2)$$

Eliminons l'inconnue $v_1^{'}$ entre les deux équations (1) et (2), en élevant au carré la première et en multiplions la deuxième par m_1 , puis on en déduit la vitesse v_2 :

$$(1)^2 \Rightarrow m_1^2 v_1^{'2} = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 - 2m_1 m_2 v_1 v_2 \rightarrow (3)$$

$$(2)m_1 \Rightarrow\rightarrow m_1^2 v_1^{'2} = m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 v_2^2 \; (4)$$

$$(3) = (4) \Rightarrow m_2^2 v_2^2 - 2m_1 m_2 v_1 v_2 = m_1 m_2 v_2^2 \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}}$$

Deuxième collision:

Soit $\vec{v}_2$ la vitesse de m_2 acquise après le premier choc, pendant que la bille m_3 est au repos. Après le deuxième choc la vitesse de la bille m_2 devient $\vec{v}_2^{'}$, et $\vec{v}_3$ la vitesse acquise par la bille m_3 . Appliquons les principes de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique pour pouvoir écrire :

$$m_2\vec{v}_2 = m_2\vec{v}_2^{'} + m_3\vec{v}_3 \Rightarrow m_2v_2^{'} = m_2v_2 - m_3v_3 \rightarrow (5)$$

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2v_2^{'2} + \frac{1}{2}m_3v_3^2 \Rightarrow m_2v_2^{'2} = m_2v_2^2 - m_3v_3^2 \rightarrow (6)$$

Eliminons l'inconnue $v_2^{'}$ entre les équations (5) et (6), en élevant au carré la première et en multipliant la deuxième par m_2, et puis en déduire la vitesse v_3 :

$$(5)^2 \Rightarrow m_2^2v_2^{'2} = m_2^2v_2^2 + m_3^2v_3^2 - 2m_2m_3v_2v_3 \rightarrow (7)$$

$$(6)m_2 \Rightarrow\rightarrow m_2^2v_2^{'2} = m_2^2v_2^2 - m_2m_3v_3^2 \rightarrow (8)$$

$$(7) = (8) \Rightarrow m_3^2v_3^2 - 2m_2m_3v_2v_3 = m_2m_3v_3^2 \Rightarrow \boxed{v_3 = \frac{2m_2v_2}{m_2 + m_3}}$$

Remplaçant v_2 par sa valeur calculée précédemment pour obtenir :

$$\boxed{v_3 = \frac{4m_1m_2v_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}} \rightarrow (9)$$

D'après l'énoncé les grandeurs v_1, m_1, m_3 sont des constantes, mais v_3 est variable puisqu'elle est fonction de m_2 dont nous devons déterminer la valeur pour que v_3 soit maximale. Le problème se transforme donc en fonction mathématique $v_3 = f(m_2)$ que nous devons dériver, et de là chercher une valeur de m_2 pour laquelle la dérivée de v_3 par rapport à la variable m_2 s'annule.

Pour simplifier posons $m_2 = x$, $v_3 = y$ et écrivons l'équation (9) sous la forme :

$$\boxed{y = \frac{4m_1v_1x}{(m_1 + x)(x + m_3)}}$$

Dérivons l'équation $y = f(x)$ pour obtenir :

$$\frac{dy}{dx} = 4m_1v_1\frac{(m_1 + x)(x + m_3) - x\left[(m_1 + x) + (x + m_3)\right]}{(m_1 + x)^2(x + m_3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4m_1v_1\frac{m_1m_3 - x^2}{(m_1 + x)^2(x + m_3)^2}$$

y atteint sa valeur maximale quand $\frac{dy}{dt} = 0$, d'où :

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow m_1m_3 - x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = m_2 = \sqrt{m_1m_3}}$$

La valeur obtenue est celle de la masse m_2 pour que la bile m_3 acquière une vitesse maximale $v_{,\max}$ après que la bille m_2 l'ait percutée. Quant à l'expression de la vitesse maximale on l'obtient en remplaçant m_2 dans l'équation (9):

$$\boxed{v_{,\max} = \frac{4m_1\sqrt{m_1m_3}\,v_1}{\left(m_1+\sqrt{m_1m_3}\right)\left(\sqrt{m_1m_3}+m_3\right)}}$$

Exercice 6.11 :

1/ La force de frottement suivant le segment rectiligne AB est :

$$\left.\begin{array}{l} f=\mu N \\ N=mg\cos\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{f=\mu mg\cos\alpha} \;,\; \boxed{f=4,9N}$$

2/ pour calculer la vitesse acquise par le corps au point B, appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum W_i$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - 0 = mga\sin\alpha - fa \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2a\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)}} \;,\; \boxed{v_B = 3,88m.s^{-1}}$$

Par la même méthode calculons la vitesse v en négligeant les frottements dans la partie BC du chemin suivi :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = mg\left(2a-l_0\right)\sin\alpha \Rightarrow \boxed{v = \left[g\left(2a-l_0\right)\sin\alpha + \frac{1}{2}v_B^2\right]^{1/2}} \;,\; \boxed{v \approx 4,6m.s^{-1}}$$

3/ Toute l'énergie cinétique acquise par le corps jusqu'à son arrivée au contact du ressort se transforme en énergie potentielle élastique dans le ressort, d'où :

$$\Delta E_c = \Delta E_p \;,\; \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \boxed{x = v\sqrt{\frac{m}{k}}} \;,\; \boxed{x = 14,5cm}$$

4/ Dans ce cas c'est l'inverse qui se produit : toute l'énergie potentielle que le ressort a emmagasinée au cours de sa compression se transforme de nouveau en énergie cinétique, de telle façon que le corps va être relancé avec la même vitesse que celle avec laquelle il a percuté le ressort. Nous allons le vérifier :

$$\Delta E_p = \Delta E_c \;,\; \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{v = x\sqrt{\frac{k}{m}}} \;,\; \boxed{v = 4,58ms^{1}}$$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique on va calculer la distance d que remonte le corps après qu'il ait quitté le ressort :

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = -mgd\sin\alpha \Rightarrow \boxed{d = \frac{v^2}{2g\sin\alpha}} \;,\; \boxed{d \approx 1,23m}$$

Exercice 6.12 :

1/ On considère le plan horizontal passant par le centre de la sphère comme référentiel de l'énergie potentielle $\left(E_{p,O}=0\right)$.

L'énergie potentielle au point M_0 est :

$$\left.\begin{array}{l} E_{M_0} = mgh_0 \\ h_0 = mg\cos\alpha \end{array}\right| \Rightarrow E_{M_0} = mgR\cos\alpha$$

L'énergie potentielle au point M est :

$$\left.\begin{aligned} &E_M = mgh + \frac{1}{2}mv^2 \\ &h = R\cos\theta \\ &v = \dot{\theta}R \end{aligned}\right| \Rightarrow E_M = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2R^2$$

En appliquant le principe de la conservation de l'énergie mécanique on en déduit la vitesse angulaire $\dot{\theta}$:

$$E_{M_0} = E_M \Rightarrow mgR\cos\alpha = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2R^2$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{2g}{R}\left(\cos\alpha - \cos\theta\right)}$$

2/ Pour calculer la réaction, on fait l'inventaire des forces, on les représente puis on les projette sur l'axe normal, et on remplace la vitesse angulaire par sa valeur que nous avons calculée dans la première question. Donc :

$$\left.\begin{aligned} &R - P\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) = ma_N \\ &a_N = \dot{\theta}^2R \\ &\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{N = mg\left(3\cos\theta - 2\cos\alpha\right)}$$

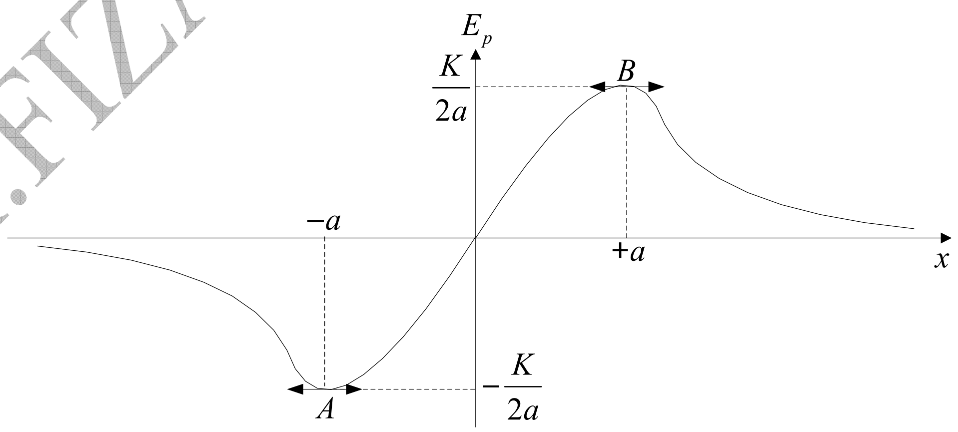
3/ Le point matériel quitte la surface de la sphère quand la réaction s'annule pour un angle bien déterminé que nous nous proposons de calculer :

$$N = 0 \Rightarrow \cos\theta_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_0 \approx 48°}$$

Discussion : L'angle sous lequel le point matériel quitte la sphère est indépendant du rayon et de la masse de la sphère. Cependant ce résultat change en présence d'une vitesse initiale ou de frottement à la surface.

Exercice 6.13 :

1/ L'allure générale de la courbe est la suivante :



2/ Les positions d'équilibre stable sont caractérisées par les deux conditions :

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \quad , \quad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0} \succ 0$$

Les positions d'équilibre instable sont caractérisées par les deux conditions :

$$\frac{dE_p}{dx}=0 \;\;,\;\; \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0} \prec 0$$

En dérivant E_p par rapport à x deux fois de suite, on obtient :

$$\frac{dE_p}{dx}=K\frac{a^2-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm a$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}=2Kx\frac{\left(x^2-3a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^3} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=+a} \prec 0 \\ \left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=-a} \succ 0 \end{array}\right.$$

Nous remarquons que la position d'équilibre stable est (A) d'abscisse $x=-a$, mais la position d'équilibre instable est (B) d'abscisse $x=+a$.

<u>Exercice 6.14</u> :

1.a/ On remarque sur a figure de l'énoncé que :

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{O'P}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{OO'}=a\vec{u}_x \\ \overrightarrow{OP}=a\vec{u}_r \end{array}\right| \Rightarrow \overrightarrow{O'P}==a\left(\vec{u}_x+\vec{u}_r\right)$$

Exprimons le vecteur unitaire $\vec{u}_x$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{u}_\theta$ pour obtenir l'expression demandée :

$$\vec{u}_x=\cos\theta.\vec{u}_r-\sin\theta.\vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{O'P}=a\left(1+\cos\theta\right).\vec{u}_r-a\sin\theta.\vec{u}_\theta}$$

Le module de ce vecteur est :

$$\left. \begin{array}{l} \left\|\overrightarrow{O'P}\right\|=\sqrt{\left[a\left(1+\cos\theta\right)\right]^2+\left[a\sin\theta\right]^2} \\ \left\|\overrightarrow{O'P}\right\|=\sqrt{2a^2\left(1+\cos\theta\right)} \\ 1+\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{O'P}\right\|=2a\cos\frac{\theta}{2}}$$

b/ la bille est soumise à une force de rappel d'expression $\vec{T}=-k\left(l-l_0\right)\vec{u}$, où $l=\left\|\overrightarrow{O'P}\right\|$ et $\vec{u}$ le vecteur unitaire suivant la direction $\overrightarrow{O'P}$. On peut décomposer le vecteur $\vec{u}$ en deux composantes : $\vec{u}=\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r-\sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta$.

Donc la tension du fil élastique est :

$$\boxed{\vec{T}=-k\left[\left(2a\cos\frac{\theta}{2}-l_0\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r-\sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta\right)\right]}$$

2.a/ Le vecteur vitesse est défini par l'expression :

$$\vec{v} = \underbrace{\dot{a}\vec{u}_r}_{0} + a\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

b/ La force $\vec{F}$ est la résultante de trois forces : le poids $\vec{P}$, la tension $\vec{T}$ et la réaction $\vec{R}$:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}$$

$$\wp = \vec{F}.\vec{v} = \left(\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}\right)\vec{v}$$

$$\vec{P}\vec{v} = \left(mg\cos\theta\vec{u}_r - mg\sin\theta\vec{u}_\theta\right)a\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{P}\vec{v} = -a\dot{\theta}mg\sin\theta$$

$$\vec{T}\vec{v} = -k\left[\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r - \sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta\right)\right]a\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{T}\vec{v} = \left[-k2a\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r + k2a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta + kl_0\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r - kl_0\sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta\right]a\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{T}\vec{v} = a\dot{\theta}2ka\underbrace{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}_{\frac{1}{2}\sin\theta} - a\dot{\theta}kl_0\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow \vec{T}\vec{v} = a^2\dot{\theta}k\frac{1}{2}\sin\theta - a\dot{\theta}kl_0\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\vec{R} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{R}\vec{v} = 0$$

$$\wp = \vec{F}.\vec{v} = \left(\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}\right)\vec{v} \Rightarrow \wp = -a\dot{\theta}mg\sin\theta + a^2\dot{\theta}k\sin\theta - a\dot{\theta}kl_0\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\boxed{\wp = a\dot{\theta}\left[(ka - mg)\sin\theta - kl_0\sin\frac{\theta}{2}\right]}$$

c/ A partir de la puissance on en déduit le travail élémentaire qu'on intègre pour obtenir l'expression de l'énergie potentielle :

$$\left.\begin{array}{l} dW = \wp dt \\ dE_p = -dW \\ \wp = a\dot{\theta}\left[(ka - mg)\sin\theta - kl_0\sin\frac{\theta}{2}\right] \end{array}\right| \Rightarrow dE_p = -\left[(ka - mg)\sin\theta - kl_0\sin\frac{\theta}{2}\right]a\underbrace{\dot{\theta}dt}_{d\theta}$$

$$E_p = -a\int\left[(ka - mg)\sin\theta - kl_0\sin\frac{\theta}{2}\right]d\theta$$

$$\boxed{E_p = a\left[(ka - mg)\cos\theta - 2kl_0\cos\frac{\theta}{2}\right] + C^{te}}$$

3.a/ Pour trouver les positions d'équilibre on cherche les valeurs de θ pour lesquelles la dérivée première de l'énergie potentielle s'annule. On remplace d'abord a et l_0 qui se trouvent dans la parenthèse par leurs valeurs respectives qui sont données dans l'expression de E_p :

$$\boxed{E_p = mga\left[\cos\theta - 2\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}\right]}$$

On dérive cette dernière expression par rapport à θ , puis on procède à une transformation trigonométrique adéquate pour obtenir à la fin le résultat suivant :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dE_p}{d\theta}=mga\left[-\sin\theta+\sqrt{3}\sin\dfrac{\theta}{2}\right]\\ \sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{\dfrac{dE_p}{d\theta}=mga\sin\dfrac{\theta}{2}\left[\sqrt{3}-2\cos\dfrac{\theta}{2}\right]}$$

On en déduit les deux valeurs de θ pour lesquelles la dérivée première s'annule :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dE_p}{d\theta}=0\\ 0\leq\theta\leq\pi/2\end{array}\right|\Rightarrow\begin{array}{l}\boxed{\theta_1=0}\\ \boxed{\theta_2=\pi/3}\end{array}$$

b/ D'après l'énoncé on doit déterminer les positions d'équilibre stable et d'équilibre instable. Pour cela on doit chercher le signe de la seconde dérivée de l'énergie potentielle pour les deux valeurs θ_1 et θ_2 :

$$\boxed{\frac{d^2E_p}{d\theta}=mga\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2}-1\right)}$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta}(\theta_1=0)=mga\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\prec 0 \text{ Equilibre instable}$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta}(\theta_2=\pi/3)=\frac{mga}{2}\succ 0 \text{ Equilibre stable}$$

Exercice 6.15 :

1/ Calculons d'abord la vitesse de la bille B_1 tout juste avant le choc avec la bille B_2. Pour cela on doit appliquer le théorème de l'énergie cinétique(h_0 est la hauteur de laquelle la bille B_1 est abandonnée) : $\Delta E_c=\sum W_i$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}m_1v_0^2=m_1gh_0\\ h_0=l(1-\cos\alpha_0)\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{v_0=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha_0)}}$$

a/ **Cas du choc élastique :**

On suppose que la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont conservées. Ceci nous permet de calculer les deux équations suivantes que nous divisons membre à membre. On obtient donc :

$$m_1v_0=m_1v_1+m_2v_2\rightarrow(1)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\Rightarrow m_1v_0^2=m_1v_1^2+m_2v_2^2\rightarrow(2)$$

$$\frac{(2)}{(1)}\Rightarrow v_2=v_0+v_1\rightarrow(3)$$

Remplaçons v_2 et v_0 dans l'équation (1), sachant que $x=\dfrac{m_1}{m_2}$ puis déduisons la vitesse v_1, il vient alors :

$$\boxed{v_1=\frac{x-1}{x+1}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha_0)}}$$

Remplaçons v_0 et v_1 dans l'équation (1) puis déduisons la vitesse v_2, on obtient alors :

$$\boxed{v_2 = \frac{2x}{x+1}\sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha_0\right)}}$$

Appliquons de nouveau le théorème de l'énergie cinétique aux deux billes pour obtenir leurs angles de déviation :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}m_1v_1^2 = m_1gh_1 \\ &h_1 = l\left(1-\cos\alpha_1\right) \\ &v_1 = \frac{x-1}{x+1}\sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha_0\right)} \end{aligned}\right| \Rightarrow m_1gl\left(1-\cos\alpha_1\right) = \frac{1}{2}m_1\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2 2gl\left(1-\cos\alpha_0\right)$$

$$\boxed{\cos\alpha_1 = 1-\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2\left(1-\cos\alpha_0\right)} \rightarrow (4)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}m_2v_2^2 = m_2gh_2 \\ &h_2 = l\left(1-\cos\alpha_2\right) \\ &v_2 = \frac{2x}{x+1}\sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha_0\right)} \end{aligned}\right| \Rightarrow m_2gl\left(1-\cos\alpha_2\right) = \frac{1}{2}m_2\left[\frac{2x}{x+1}\right]^2 2gl\left(1-\cos\alpha_0\right)$$

$$\boxed{\cos\alpha_2 = 1-\left[\frac{2x}{x+1}\right]^2\left(1-\cos\alpha_0\right)} \rightarrow (5)$$

<u>Discussion</u> :

$x \succ 1 \Rightarrow \left| \begin{matrix} v_1 \succ 0 \\ v_2 \succ 0 \end{matrix} \right.$: Les deux billes remontent dans le même sens après le choc telle que la vitesse de A_1 soit plus petite que la vitesse de A_2 .

$x = 1 \Rightarrow \left| \begin{matrix} v_1 = 0 \\ v_2 = v_0 \end{matrix} \right.$: La bille A_1 s'arrête après le choc en transférant toute son énergie à la bille A_2 qui s'élance avec a vitesse v_0 .

$x \prec 1 \Rightarrow \left| \begin{matrix} v_1 \prec 0 \\ v_2 \prec 0 \end{matrix} \right.$: Les deux billes remontent en sens contraires de telle façon que la bille A_1 revient sur son chemin et la bille A_2 se déplace dans le sens contraire.

b/ **<u>Cas du choc mou</u> :**

La quantité de mouvement étant conservée, la vitesse des deux billes collées ensemble tout juste après le choc est :

$$m_1v_0 = \left(m_1+m_2\right)v \Rightarrow \boxed{v = \frac{x}{x+1}\sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha_0\right)}} \rightarrow (6)$$

On applique au système le théorème de l'énergie cinétique pour trouver :

$$\Delta E_c = \sum W_i$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = (m_1+m_2)gh\\&h = l(1-\cos\alpha)\end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}} \rightarrow (7)$$

L'égalisation des deux équations (6) et (7) nous donne l'angle de déviation α dans le cas du choc mou :

$$\boxed{\cos\alpha = 1-\left[\frac{x}{x-1}\right]^2(1-\cos\alpha_0)}$$

2/ <u>Application numérique</u> :

a/ Pour trouver la valeur de x pour laquelle les deux billes s'écartent en sens contraires d'un même angle, il faut égaliser les deux équations (4) et (5) :

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \Rightarrow 1-\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2(1-\cos\alpha_0) = 1-\left[\frac{2x}{x+1}\right]^2(1-\cos\alpha_0)$$

$$3x^2+2x-1=0 \Rightarrow \left|\begin{aligned}&x_1=-1\\&x_2=1/3\end{aligned}\right.$$

Seule la solution positive est acceptable, soit : $\boxed{x = x_2 = 1/3}$, et l'angle α' correspondant est :

$$\cos\alpha' = 1-\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2(1-\cos\alpha_0),\quad \cos\alpha' = 0,875 \Rightarrow \boxed{\alpha' = 29°}$$

b/ Les deux angles de déviation pour $x = 2$:

Dans le cas du choc élastique : on remplace dans l'équation (4) :

$$\cos\alpha_{1_{x=2}} = 1-\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2(1-\cos\alpha_0),\quad \cos\alpha_{1_{x=2}} = 0,94 \Rightarrow \boxed{\alpha_{1_{x=2}} \approx 20°}$$

Dans le cas du choc mou : on remplace dans l'équation (5) :

$$\cos\alpha_{2_{x=2}} = 1-\left[\frac{2x}{x+1}\right]^2(1-\cos\alpha_0)\cos\alpha_{2_{x=2}} = 0,11 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_{2_{x=2}} = 83,7°}$$